

Magnetismus, Gravitation und Gravitationsgrenzen.

Vorbemerkung:

Im Folgenden werden das Internationale Maßsystem [kg, m, sec Volt, Amp] verwendet, und Vektoren sollen durch Überstreichung des Symbols gekennzeichnet werden.

Einleitung

In unserer Arbeitsgruppe wurde versucht, die Struktur der elementaren Materiefeldquanten (dieser Begriff umfasse sowohl die ponderablen Elementarteilchen als auch die Photonen einheitlich zu beschreiben. Im statischen Fall (es liege keine Wechselwirkung mit anderen Materiefeldquanten vor) wird, nach unseren theoretischen Arbeitsergebnissen, ein solches Materiefeldquant zusammen mit seinem Gravitationsfeld durch ein Eigenwertproblem $C; \Phi = \Lambda^* \Phi$ in einem R_6 mit einer metrischen Struktur $g_{ki} \neq \delta_{ki}$ (hier durchlaufe i und k die Ziffern 1 bis 6) beschrieben. Ist $g = |g_{ik}|_6 \neq 0$ und $d\Omega = \sqrt{-g} \prod_{k=1}^6 dx^k$ (die hochgestellten, zum Unterschied von Potenzen unterstrichenen Indizes kennzeichnen kontravariante Größen), dann gilt:

$$\int_{\Omega} \sqrt{-g} \Phi \Phi^* \prod_{k=1}^6 dx^k < \infty$$

und

$$\int_{\Omega} \sqrt{-g} (\phi^* C; \phi - \phi(C; \phi)^*) \prod_{k=1}^6 dx^k = 0$$

d.h. Φ ist als Zustandsfunktion konvergent und der Operator C hermetisch. Die Eigenwerte Λ bilden ein diskretes Punktspektrum und beschreiben somit Quantenstufen im R_6 mit den zugehörigen Eigenfunktionen Φ .

Allgemein kann das Eigenwertproblem nicht gelöst werden, doch liefert eine Kette von Approximationen einerseits die Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie und andererseits einen der Quantendynamik analogen Formalismus, je nachdem, ob man makroskopisch als Feldkontinuum nach dem Korrespondenzprinzip approximiert unter Beibehaltung der nichteuklidischen Struktur, oder ob man euklidisch approximiert und die mikroskopischen Quantenzustände beibehält. In jedem Fall müssen aber x^5 und x^6 des R_6 vernachlässigt werden, sodaß sich die Approximationen im raumzeitlichen Unter-
raum R_4 des R_6 vollziehen.

Eine andere empirisch prüfbare Aussage ergibt sich, wenn die $g_{ik} \rightarrow G(\varphi) \delta_{ik}$, $g_{44} \rightarrow -G$ im R_4 approximativ durch eine von einer gravitativen Feldfunktion φ abhängigen Funktion G ausgedrückt und zugleich nach dem Korrespondenzprinzip die Quantenstufen vernachlässigt werden. Es besteht schließlich noch die Möglichkeit, physikalisch meßbare Feldgrößen einzuführen, wodurch eine komplexe vektorielle Gleichung $f(\varphi, \vec{H}, \vec{E}, \vec{I}) = 0$ mit $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ und $\vec{H}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ bzw. $\vec{E}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ und $\vec{I}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ im pseudoeuklidischen R_4 entsteht (es ist $x_4 = ict$, wenn c die Lichtgeschwindigkeit angibt), wobei wegen $g_{ik} \sim \delta_{ik}$ anstelle der kontravarianten Schreibweise die kovariante verwendet werden kann. φ hat dabei die Dimensionierung eines Geschwindigkeitsquadrats und muß als gravitatives Beschleunigungsniveau gedeutet werden, während $\vec{H}$ eine in Gauß gemessene magnetische, $\vec{E}$ eine in Volt/m gemessene elektrische Feldstärke und $\vec{I}$ einen elektrischen Stromfluß angeben. Eigentümlicherweise scheinen diese Größen mit φ verknüpft.

Wird in $f = 0$ der stationäre Fall angenommen, d.h. hängen φ , $\vec{H}$, $\vec{E}$ und $\vec{I}$ nicht mehr von der Lichtzeit x_4 ab, werden höhere als erste Ableitungen als erste Feldgrößen vernachlässigt und wird Kugelsymmetrie angenommen, treten also die Koordinaten x_1, x_2, x_3 des R_3 nur in Verbindungen $r^2 = \sum_{k=1}^3 x_k^2$ bzw. $r dr = \sum_{k=1}^3 x_k dx_k$ oder $(dr)^2 = \sum_{k=1}^3 (dx_k)^2$ auf, dann liefert die Spaltung von $f = 0$ in den Real- und Imaginärteil die beiden Gleichungen

$$(a) \quad r^2 \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 + \frac{3 \cdot 2}{3} c^2 F \left(r \frac{d\varphi}{dr} + F\varphi \right) = 0 \quad \text{und}$$

$$(b) \quad \text{rot} \left(\vec{H} + \frac{\vec{E}}{c} \right) = \vec{N}; \quad \text{grad} \varphi + \mu_0 \vec{I} - \frac{\dot{\vec{H}}}{c}$$

$$\text{mit} \quad \vec{N} = \mathcal{X} \left(\frac{\vec{r}}{r} \mid \dot{\vec{r}} - \vec{\omega} \times (\quad) \right),$$

und mit der Kürzung

$$F = \frac{c^3 \lambda^3}{c^3 \lambda^2} + \frac{\chi h r}{\gamma h r},$$

in welcher γ die Newton'sch Gravitationskonstante, h das Plank'sche Wirkungsquantum und λ die Wellenlänge $\lambda = \frac{h}{m c}$ bedeutet, die den Materiefeldquanten der Masse m entspricht, welche die makroskopische Kollektive $L m = M$ aufbauen (hier ist L ganzzahlig), von der das Feld φ erregt wird.

$\bar{\omega}$ in der Gleichung b ist eine Winkelgeschwindigkeit, mit der die Quelle M des Feldes rotieren kann, während κ eine Naturkonstante ist, für die der Wert $\kappa = \frac{2}{c} \cdot 10^3 \sqrt{\frac{3\mu_0}{\pi\hbar}}$ gilt, wenn μ_0 die Induktionskonstante angibt. Da in Gleichung b als vektorieller Faktor $\text{grad } \varphi$ auftritt, aber Gleichung a das Feld $\bar{H}$ nicht enthält, soll zunächst Gleichung a diskutiert werden.

Makroskopische Grenzen der Gravitation.

Die Gleichung a beschreibt approximativ unter den gegebenen Voraussetzungen den kugelsymmetrischen Verlauf $\varphi(r)$ im R_3 . Diese Differentialgleichung kann elementar gelöst werden. Es ergibt sich, wenn $B = \text{const.}$ die Integrationskonstante ist die zweideutige Lösung $r q e^{-q} = B (c^3 \lambda^3 - \gamma h r)^2$ mit $q = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{3\varphi}{8c^2}}$, doch kommt hier nur der negative Zweig in Betracht, weil gefordert werden muß, das φ unter geeigneten Approximationsbedingungen, das Newton'sche Gesetz $\varphi_n = \frac{\gamma M}{r}$ liefert und zum anderen keine Singularitäten in der Form von Unendlichkeitsstellen auftreten dürfen. Mithin gilt

$$r q e^{-q} = B (c^3 \lambda^3 - \gamma h r) \quad \text{mit} \\ q = 1 - \sqrt{1 - \frac{3\varphi}{8c^2}}.$$

Offenbar existiert ein Abstand $r = \varrho$, für den $c^3 \lambda^3 - \gamma h \varrho = 0$ gilt und der als Grenze des attraktiven Gravitationsfeldes angesprochen werden muß, denn wegen $B > 0$ wird $q e^{-q} = 0$, da immer $q < \infty$ bleibt, nur für $q(\varrho) = 0$ erfüllt, was aber nur für $\varphi(\varrho) = 0$ möglich ist. Diese Gravitationsgrenze ϱ ist weder im Newtonschen noch im Einstein'schen Gravitationsgesetz enthalten. Beispielsweise gilt für das Newton'sche Gesetz der asymptotische Verlauf $\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi_n = 0$, während für den durch Gleichung a beschriebenen Verlauf $\varphi \geq 0$ für $r \leq \varrho < \infty$ gilt.

Aus $c^3 \lambda^3 - \gamma h \varrho = 0$ folgt für die Entfernung der Gravitationsgrenze $\varrho = \frac{c^3 \lambda^3}{\gamma h}$ oder mit $\lambda = \frac{h}{m c}$ auch $\varrho = \frac{h^2}{\gamma m^3}$, mit anderen Worten, es ergibt sich das eigentümliche Bild, das die mikrokosmische Quantenstruktur der gravitativen Feldquelle den makrokosmischen Verlauf des Gravitationsfeldes bestimmt, denn ϱ wird nur von der Trägheitsmasse m der Materiefeldquanten bestimmt, welche die makroskopische Feldquelle

Hieraus geht hervor, daß für Entfernungen $r \ll \varrho$ der Verlauf von φ und $\text{grad } \varphi$ praktisch nicht von den Newton'schen Formen abweicht, daß aber die Korrektur wesentlich wird, wenn die Entfernungen mit ϱ vergleichbar werden. Ist r_0 irgendein Anfangswert (z.B. der Radius des betreffenden Himmelskörpers) dann ist im Intervall $r_0 \leq r < \varrho$ immer $\varphi(r) > 0$ und $\text{grad } \varphi < \bar{0}$ weil $\bar{g}_n < \bar{0}$ ist. Hierdurch wird aber ein Attraktionsfeld beschrieben, d.h. im Intervall $r_0 = r < \varrho$ erscheint eine gravitative Wechselwirkung stets als Attraktion. Die Kugelfläche $r = \varrho$ bedingt dagegen $\varphi \propto e^{-q} = 0$, was nur für $q(\varrho) = 0$, also $\varphi(\varrho) = 0$ möglich ist, und entsprechend wird auch $(\text{grad } \varphi)_{r=\varrho} = \bar{0}$, sodaß auf der Fläche $r = \varrho$ überhaupt keine gravitativen Wirkungen auftreten können.

Jenseits dieser Fläche, also im Bereich $r > \varrho$, kann sich das Vorzeichen von φ nicht ändern, weil, wegen $(1 - \frac{r}{\varrho})^2$, das Vorzeichen von $r \propto e^{-q}$ erhalten bleibt, sodaß wiederum $\varphi(r > \varrho) > 0$ nach $\varphi(\varrho) = 0$ wieder ansteigt, während, wegen $1 - \frac{r^2}{\varrho^2} < 0$, für $r > \varrho$ der Feldvektor $(\text{grad } \varphi)_{r > \varrho} > \bar{0}$ das Vorzeichen wechselt, wodurch aber ein Abstoßungsfeld beschrieben wird. Im Bereich $r > \varrho$ muß also eine gravitative Wechselwirkung in Form einer Abstoßung erscheinen, sodaß ϱ besser als Grenze der gravitativen Attraktion bezeichnet wird.

Der jeweilige Wert $\varrho < \infty$ wird offenbar durch die mikrokosmische Quantenstruktur der das Gravitationsfeld erregenden Materie bedingt, denn m gibt die Masse eines Materiefeldquants an. Wird diese quantenhafte Struktur vernachlässigt und die Materie nicht atomar, sondern als Kontinuum aufgefaßt, dann ist $m \rightarrow 0$ zu setzen, was die Divergenz $\varrho \rightarrow \infty$ in dritter Ordnung zur Folge hat, wobei allerdings M unverändert endlich bliebe, weil $m \rightarrow 0$ des Kontinuums durch $L \rightarrow \infty$ kompensiert würde. Der endliche Wert $\varrho \rightarrow \infty$ aus Gleichung a1) muß auf die Berücksichtigung der Quantenstruktur zurückgehen und kann daher in der Newton'schen Formulierung wegen $\varrho \rightarrow \infty$ nicht auftreten.

Ist D das Atomgewicht der das Feld erregenden Materie und m_H die Protonenmasse, sodaß $m = D m_H$ gesetzt werden kann, dann gilt $D^3 \varrho = \frac{h^2}{8 m_H^3} \approx 1,6 \cdot 10^{24} [\text{m}] \approx 1,6 \cdot 10^8 [\text{Lj}]$ (die Dimensionierung $[\text{Lj}]$ bedeutet Lichtjahre). Mit dieser Faustformel können die Gravitationsgrenzen für beliebige Materieanhäufungen abgeschätzt werden.

$M = L m$ aufbauen, nicht aber von der Zahl L , die offenbar nur die Intensität des Gravitationsfeldes verändert. Mit q und $A = B c^6 \lambda^6$ kann die Lösung des sowohl im mikro- als auch im makroskopischen Bereich gültigen approximativen Gesetzes (Gleichung a) auch in die Form $r q e^{-q} = A (1 - \frac{r}{\rho})^2$ gebracht werden.

Da für alle Entfernungen $r \ll \rho$ vom Zentrum immer in guter Näherung $\varphi(r) \approx \varphi_n = \frac{\gamma M}{r}$ sein muß, ferner $\frac{r}{\rho} \ll 1$ bleibt und immer $(\frac{\varphi_n}{c^2})^\nu \approx 0$ für $\nu > 1$ ist, kann für die Abstände r immer die Reihenentwicklung $q(\varphi_n) \approx \frac{3\varphi_n}{16c^2}$ und $e^{-q} \approx 1 - \frac{3\varphi_n}{16c^2}$ nach $\nu = 1$ abgebrochen werden, was mit $(1 - \frac{r}{\rho})^2 \approx 1$ eingesetzt, für A die Abschätzung $A \approx \frac{3}{16c^2} \varphi_n$ liefert, oder wegen $\varphi_n = \frac{\gamma M}{r}$ auch $A \approx \frac{3\gamma M}{16c^2}$. Differentiation der Lösung $r q e^{-q} = A (1 - \frac{r}{\rho})^2$ nach r liefert, weil $q = 1 - \sqrt{1 - \frac{3\varphi}{8c^2}}$ ist, den eindeutigen Ausdruck

$$\frac{d\varphi}{dr} = - \frac{16}{3} c^2 \frac{q}{r} \frac{1 - \frac{r^2}{\rho^2}}{(1 - r/\rho)^2},$$

was mit $q = \frac{A}{r^3} e^q (1 - \frac{r}{\rho})^2$ substituiert, unter Verwendung von $A \approx \frac{3\gamma M}{16c^2}$, die Beziehung

$$\frac{d\varphi}{dr} = - \frac{\gamma M}{r^2} e^q (1 - \frac{r^2}{\rho^2}) \quad \text{ergibt.}$$

Wegen der Kugelsymmetrie und der Abhängigkeit $\varphi(r)$ ist aber $\frac{d\varphi}{dr} = |\text{grad } \varphi|$ oder, wenn $\bar{e}_r = \frac{r}{r}$ der Einheitsvektor von r ist, $\text{grad } \varphi = \bar{e}_r \frac{d\varphi}{dr}$. Dieser Gradientenvektor ist aber der in Gleichung b vorkommende gravitative Beschleunigungsvektor, dessen Newton'sche Form durch $\bar{g}_n = - \bar{e}_r \frac{\gamma M}{r^2} < 0$ gegeben ist. Wird dies in $\bar{e}_r \frac{d\varphi}{dr}$ eingesetzt, dann ergibt sich für den gravitativen Feldvektor im R_3 eine durch die Theorie bedingte, korrigierte Form des Newton'schen Beschleunigungsvektors, nämlich $\text{grad } \varphi = \bar{g}_n e^q (1 - \frac{r^2}{\rho^2})$, sodaß die in der Gleichung a enthaltenen Aussagen zusammengefaßt werden können in

$$\begin{aligned} (a1) \quad r q e^{-q} &= \frac{A}{r} (1 - \frac{r}{\rho})^2, \\ q &= 1 - \sqrt{1 - \frac{3\varphi}{8c^2}}, \\ \text{grad } \varphi &= \bar{g}_n e^q (1 - \frac{r^2}{\rho^2}), \\ A &= \frac{3\gamma M}{16c^2}, \\ \bar{g}_n &= - \bar{e}_r \frac{\gamma M}{r^2}, \\ M &= L m, \\ \rho &= \frac{h^2}{\gamma m^3}. \end{aligned}$$

Astrophysikalische Untersuchungen zeigen, daß sich die Materie der Galaxis ungefähr zu 70 % aus H, zu 29 % aus He und zu 1 % aus schweren Elementen aufbaut, sodaß die Gravitationsgrenzen der Spiralnebel wahrscheinlich zwischen 10^7 [Lj] und $8 \cdot 10^7$ [Lj] zu suchen sind, d.h. extragalaktische Spiralnebel können im allgemeinen nur in einem attraktiven physikalischen Zusammenhang stehen, wenn ihre gegenseitigen Abstände unter der Schranke von 10^7 [Lj] liegen. Tatsächlich werden Spiralnebelnester beobachtet, in denen die gegenseitigen Abstände der Objekte dieser Forderung genügen und die das typische Bild derjenigen Ordnung geben, welche durch die attraktive Wechselbeziehung entstehen muß, während übergeordnete Systeme offensichtlich nicht existieren.

In großen Entfernungen, die die angeführten Größenordnungen überschreiten, erscheint die Verteilung der Materie im Kosmos völlig chaotisch. Quantitative Schlüsse können leider in bezug auf φ noch nicht gezogen werden, weil noch nicht genügend astronomisches Beobachtungsmaterial vorliegt.

Interessant ist das Verhalten von $\text{grad } \varphi$ im Bereich $r > \varphi$, denn in diesem Bereich gilt $\text{grad } \varphi = -\bar{g}_n e^q \left(\frac{r^2}{\varphi^2} - 1 \right) = e^q (\bar{g}_n(r) - \bar{g}_n(\varphi))$. Wächst r immer weiter an, dann wird $|\bar{g}_n(\varphi)| \gg |\bar{g}_n(r)|$ für $r \gg \varphi$, während sich e^q nur überaus langsam ändert, sodaß sich im Bereich $r \gg \varphi$ eine nahezu konstante Abstoßung $\text{grad } \varphi \approx -e^q \bar{g}_n(\varphi) \approx \bar{g}_n(\varphi) = \text{const.}$ einstellt.

sind $\dot{\vec{r}} = \text{const}$ und $\vec{\omega} = \text{const}$ hinsichtlich der Zeit t , weil anderenfalls die Gleichung b nicht gilt. Liegt die geradlinig gleichförmige Translation $\dot{\vec{r}} \neq \vec{0}$ mit $\vec{\omega} = \vec{0}$ entstehen muß, dessen Rotor die gleiche Richtungslinie hat, wie der Vektor der Translationsgeschwindigkeit. Dieser spezielle Fall reiner Translation soll nicht weiter diskutiert werden sondern nur diesen Sachverhalt aufzeigen, denn eine Integration von $\text{rot } \vec{H}_T$ zeigt, daß eine empirische Prüfung kaum möglich sein wird, weil die bewegten Massen und ihre Relativgeschwindigkeiten im Bereich kosmischer Größenordnungen sein müssen um meßbare Felder $\vec{H}_T$ zu erhalten. Im Universum wiederum ist dieser Sonderfall reiner Translation bei gleichzeitiger Einhaltung von $\dot{\vec{r}} = \text{const}$ und der meßtechnischen Bedingungen offenbar nicht erfüllt.

Im Gegensatz hierzu erscheint es angebracht, die rein rotatorische Bewegung $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ mit $\dot{\vec{r}} = \vec{0}$, also $\text{rot } \vec{H}_R = -\kappa \vec{\omega} \times \vec{g} = \kappa \vec{g} \times \vec{\omega}$ näher zu untersuchen. $\dot{\vec{r}} = \vec{0}$ setzt $r = \text{const}$ voraus und dies sei der Radius einer kugelförmigen Masse M , die das Gravitationsfeld $\vec{g}$ erregt und mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ rotiert. $\vec{\omega}$ läuft dabei normal zur Äquatorebene und zu den Schnittebenen der Breitenparallelen, sodaß er als zeitliche Änderung der Längengerade aufgefaßt werden kann. Hieraus folgt, daß seine Richtungslinie mit der Drehachse von M zusammenfällt, sodaß $\chi(\vec{\omega}, \vec{r}) = \vartheta$ die Poldistanz angibt. Da $\vec{g}$ dem Radiusvektor entgegengerichtet ist, muß $\chi(\vec{g}, \vec{\omega}) = \vartheta + \pi$ sein.

Ist weiter $d\vec{F}$ das Element einer Fläche, welche von einem halben Kugelmeridian begrenzt und somit von $\vec{r}$ und $\vec{\omega}$ aufgespannt wird, dann gilt immer $d\vec{F} = \frac{1}{2} r^2 d\vartheta$ und damit kann die Integration $\int \text{rot } \vec{H} d\vec{F} = \kappa \int \vec{g} \times \vec{\omega} d\vec{F}$ ausgeführt werden. Offenbar ist $\chi(\vec{g} \times \vec{\omega}, d\vec{F}) = 0$, sodaß sich $\int \text{rot } \vec{H}_R d\vec{F} = \kappa \int |\vec{g} \times \vec{\omega}| d\vec{F} = \frac{\kappa}{2} r^2 \int \omega |g| \sin(\pi + \vartheta) d\vartheta = -\frac{\kappa}{2} r^2 |g| \omega \int \sin \vartheta d\vartheta$ ergibt. Die Fläche $\vec{F}$ wird dabei vom Kugeldurchmesser und einem Halbmeridian begrenzt, sodaß für den Betrag des Linienelementes $ds = r d\vartheta$ gilt, weil $r = \text{const}$ ist. Ist ferner H_h die Horizontalkomponente von $\vec{H}_R$, welche den Kugelmeridianen parallel läuft, dann kann für $\int \text{rot } \vec{H}_R d\vec{F}$ der Stokesche Integralsatz in der Form $\int \text{rot } \vec{H}_h d\vec{F} = \oint \vec{H}_h d\vec{s} = -r \int H_h d\vartheta$ angewendet werden, weil nach den Untersuchungen der reinen Translation und der Orientierung der Rotationsbewegung

Die Magnetfelder der Himmelskörper.

Die im ersten Teil angeführte approximative Feldgleichung b, nämlich $\text{rot} \left(\vec{H} + \frac{\vec{E}}{c} \right) = \vec{N}$; $\text{grad} \varphi + \mu_0 \vec{I} - \frac{\vec{H}}{c}$ mit $\vec{N} = \kappa \left(\frac{\dot{\vec{r}}}{r} \parallel - \vec{\omega} \times () \right)$ und $\kappa = \frac{2}{c} 10^3 \sqrt{\frac{3\mu_0}{\pi g}}$ ist offenbar eine durch die Feldtheorie notwendig gewordene, wenn auch approximative Erweiterung des elektromagnetischen Induktionsgesetzes. Trotz dieser Erweiterung kann aber immer in sehr guter Näherung (der Approximationsfehler dürfte weit unter der Meßbarkeitsgrenze liegen) $\text{rot} \vec{E} \approx - \dot{\vec{H}}$ [Gauß/sec] geschrieben werden, wodurch Gleichung b auf $\text{rot} \vec{H} = \vec{N}; \text{grad} \varphi + \mu_0 \vec{I}$ reduziert wird. Jeder elektrische Stromfluß $\vec{I} > \vec{0}$ erzeugt ein magnetisches Feld $\text{rot} \vec{H} \neq \vec{0}$ derart, daß nach den einfachen Maxwellgleichungen für $\vec{I} = \vec{0}$ auch $\text{rot} \vec{H} = \vec{0}$ würde. Wird angenommen, daß in der Masse M, welche $\text{grad} \varphi$ erzeugt, überhaupt kein elektrischer Strom fließt, also $\vec{I} = \vec{0}$ ist, dann bleibt nach Gleichung b trotzdem $\vec{H} \neq \vec{0}$ solange $\vec{N}$ vom Nulloperator verschieden bleibt, denn $\text{grad} \varphi = \vec{0}$ wird nur für $r = g$ möglich, doch soll $r \ll g$ vorausgesetzt werden, sodaß dieser Fall ausscheidet, oder aber es muß $M = 0$ sein, was ebenfalls ausgeschlossen werden soll.

$\text{rot} \vec{H} = \vec{N}; \text{grad} \varphi$ kann also nur für $\vec{N} = 0$ verschwinden, doch würde dies, wegen $\vec{N} = \kappa \left(\frac{\dot{\vec{r}}}{r} \parallel - \vec{\omega} \times () \right)$, bedeuten, daß die das Feld $\text{grad} \varphi = \vec{g}$ erregende Masse M in völliger Ruhe bleibt, daß also sowohl die translatorische Relativbewegung $\dot{\vec{r}} = 0$ als auch eine relativ zum Schwerpunkt erfolgende Rotation mit der (Winkelbeschleunigung) Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \vec{0}$ verschwindet. Wenn also eine das Gravitationsfeld $\vec{g} = \text{grad} \varphi$ erregende Masse M sich in irgend einem Bewegungszustand (ausgedrückt durch den Operator $\vec{N}$) befindet, dann wird diese Bewegung, auch dann, wenn völlige Neutralität herrscht, nach Gleichung b von einem Magnetfeld $\text{rot} \vec{H} = \vec{N}; \vec{g} \neq \vec{0}$ begleitet. Diese Aussage könnte aber evtl. zur experimentellen Prüfung der neuen Feldtheorie verwendet werden, denn es wäre denkbar, daß die nach der Theorie durch Massenbewegungen entstandenen Magnetfelder unter geeigneten Bedingungen nachgewiesen werden können. Der allgemeine Bewegungszustand $\vec{N}$ wird durch $\dot{\vec{r}} \neq \vec{0}$ und $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ gekennzeichnet und diese allgemeine Bewegung wiederum kann in einen rein radial translatorischen Anteil $\dot{\vec{\omega}} \neq \vec{0}$ mit $\vec{\omega} = \vec{0}$ und in einen rotatorischen Anteil $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ mit $\dot{\vec{r}} = \vec{0}$ zerlegt werden. In jedem Fall

$\chi(\vec{H}_h, d\vec{s}) = \pi$ sein muß. Substitution mit $\int \text{rot } \vec{H}_R d\vec{F} = r/H_h d\vartheta$ und Differentiation mit ϑ liefert dann für die Horizontalkomponente $H_h = \frac{\chi}{2} r |g| \omega \sin \vartheta$. Hierin kann ϑ , wegen $\vartheta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ durch die Breitengrade φ ersetzt werden und für $|g|$ kann, nach der Analyse der Gleichung a, wegen $r \ll \varphi$, immer in sehr guter Näherung $|g| \approx |g_n| = \frac{\chi M}{r^2}$ gesetzt werden. Wird mit diesen Größen substituiert, dann folgt für die Horizontalkomponente $H_h = \frac{\pi}{2} \chi M \frac{\omega}{r} \cos \varphi$, wobei zu bemerken wäre, daß r nicht notwendig als Radius des von M ausgefüllten Kugelvolumens interpretiert werden muß, r kann vielmehr der Radius irgendeiner außerhalb M liegenden Niveauläche sein.

Wenn also nach dem Vorangegangenen eine Masse M mit der Frequenz ω rotiert, dann müßte ein Magnetfeld H_R mit der Horizontalkomponente H_h auftreten und es wäre zu untersuchen unter welchen technischen Bedingungen ein solches Magnetfeld nachgewiesen werden kann.

Ist g_0 die Fallbeschleunigung der Erdoberfläche, füllt weite M ein Kugelvolumen vom Radius r_0 aus und ist σ das spezifische Gewicht dieser Materie, dann wird am Äquator

$$H_h = \frac{2}{3} \frac{\pi \chi \omega}{g_0} \sigma r_0^2 \omega,$$

weil hier $\varphi=0$ ist.

Da $\chi = \frac{2}{c} 10^3 \sqrt{\frac{3\mu_0}{\pi}}$ ist, folgt, nach Einsetzen der Naturkonstanten,

$$\chi \approx 8 \cdot 10^{-4} \quad \text{und} \quad \frac{2}{3} \pi \frac{\chi \omega}{g_0} \approx 1,1 \cdot 10^{-14}.$$

Ist ΔH die Meßbarkeitsgrenze eines Magnetfeldes und $b = n g_0$ diejenige Zentrifugalbeschleunigung in vielfachen n der irdischen Fallbeschleunigung g_0 , die das Kugelmateriale σ aufgrund seiner Zerreißfestigkeit noch aushält, dann folgt

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{n g_0}{r_0}}, \quad \text{also für den Kugelradius} \\ r_0 \approx 3,4 \cdot 10^9 \sqrt{\frac{(\Delta H)^2}{\sigma^2 n}}.$$

Wenn somit eine Kugel vom Radius r_0 aus einem Material vom spezifischen Gewicht σ hergestellt wird, das aufgrund seiner Zerreißfestigkeit der Zentrifugalbeschleunigung $n g_0$ aushält, dann muß ein Magnetfeld ΔH nachweisbar sein, wenn die Kugel mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert. Das Kugelmateriale darf dabei auf keinen Fall ferromagnetisch sein und sollte nach Möglichkeit den elektrischen Strom schlecht leiten (um den Nicolseffekt herabzusetzen) und eine hohe Zerreißfestigkeit haben.

Für die experimentaltechnische Durchführung eines solchen Versuches ist aber besonders wichtig, die Meßbarkeitsgrenze ΔH möglichst stark herabzusetzen, denn nur dann bewegen sich r_0 , n und σ in technisch realisierbaren Größenordnungen. Wird die magnetische Feldmessung induktiv durchgeführt, dann erscheint die Messung in Form elektrischer Spannungsschübe. Ohne weiteres dürfte es möglich sein, die Frequenz dieser Spannungsschübe durch geeignete Konstruktion rotierender Induktionsspulen auf die Größenordnung $10^2 [\text{sec}^{-1}]$ zu bringen. In unserem Laboratorium wurde inzwischen ein Spezialgerät entwickelt, welches es möglich macht, im Frequenzbereich zwischen 8 Hz noch elektrische Spannungsschwankungen von $\pm 10^{-6} [\text{Volt}]$ zu oszillographieren, sodaß durchaus damit zu rechnen ist, daß auf diese Weise die Gleichung einer direkten experimentellen Überprüfung im Laboratorium zugänglich gemacht werden kann.

Eine solche direkte experimentelle Prüfung im Laboratoriumsversuch könnte sich aber erübrigen, denn im kosmischen Bereich sind die Bedingungen von $\text{rot } \vec{H}_R = \kappa \vec{g} \times \vec{\omega}$ erfüllt, weil jeder rotierende Himmelskörper nichts anderes ist, als eine mit $\vec{\omega}$ rotierende träge Masse, sodaß in der Umgebung der Oberfläche solcher Himmelskörper immer Magnetfelder nachweisbar sein, wobei ein auf der Oberfläche ruhender Meßort zwar auf dieser Oberfläche ruht, aber relativ zur Drehachse bewegt wird, sodaß in jedem Fall das Magnetfeld nachweisbar sein muß.

Als Beispiel werde zunächst das lunare Magnetfeld untersucht. In $H_h = \frac{1}{2} \kappa M \frac{\omega}{r} \cos \varphi \approx 2,64 \cdot 10^{-14} M \frac{\omega}{r} \cos \varphi$ müssen die Größen M und ω für den Mond eingesetzt werden, Wäre $\omega = 0$, dann hätte der Mond überhaupt kein Magnetfeld. Tatsächlich ist aber mit dem Monatsumlauf in 28 Tagen jeweils eine Drehachse um die Mondachse verbunden, sodaß für den Mond $\omega \approx 4,1 \cdot 10^{-7} [\text{sec}^{-1}]$ zu setzen ist, was mit der Mondmasse $M \approx 7,4 \cdot 10^{22} [\text{kg}]$ in H_h eingesetzt $H_h \approx \frac{814}{r} \cos \varphi$ liefert. Da für den Mondradius $r \approx 1,74 \cdot 10^6 [\text{m}]$ gilt, folgt für das horizontale lunare Magnetfeld an der Mondoberfläche $H_h \approx 4,65 \cdot 10^4 \cos \varphi [\text{Gauß}]$. In einer Entfernung von einigen 10^3 km von der Mondoberfläche kann also das mondmagnetische Feld nur einige 10^{-4} bis einige $10^{-5} [\text{Gauß}]$ in der Ebene

$\cos \varphi = 1$ betragen, d.h. derart geringe magnetische Feldstärken können durch andere magnetische Effekte, wie z.B. durch die Bewegung des ionisierten Sonnengases usw. überdeckt werden, sodaß sie nicht nachgewiesen werden können wenn das Meßgerät den Mond in einigen 10^3 km Abstand von der Oberfläche umfährt. Tatsächlich wurde von der russischen automatischen Station bei der Mondumfliegung ein mondmagnetisches Feld nicht nachgewiesen.

Die Gleichung für H_h muß es möglich machen, auch die Horizontalkomponente des erdmagnetischen Feldes in Abhängigkeit von der geographischen Breite zu berechnen. Mit $\frac{1}{2} \pi \approx 2,64 \cdot 10^4$, $\omega = \frac{10^{-4}}{8,64} [\text{sec}^{-1}]$ (Tagesrotation), sowie $r \approx 6,37 \cdot 10^6$ [m] (ein Mittelwert) und $M \approx 6 \cdot 10^{24}$ [kg] folgt für die Horizontalkomponente des Magnetfeldes an der Erdoberfläche die Abschätzung $H_h = 0,29 \cdot \cos \varphi$.

Für die Breitengrade (jeweils von 10 zu 10) ergibt sich die theoretische Zusammenstellung:

T a b e l l e I

φ	80°	70°	60°	50°	40°	30°	20°	10°	0°
H_h	49	98,6	145	186,4	222	251	272,5	285,6	290

wenn als Einheit 10^{-3} [Gauß] verwendet wird. Die eindeutigen Angaben von H_h beziehen sich sowohl auf nördliche als auch auf südliche Breiten.

Im Rahmen der geophysikalischen Untersuchungen wurden weitgehende erdmagnetische Feldmessungen durchgeführt und von 10 zu 10 Grad geographischer Länge zusammengestellt. Für die nachstehenden Untersuchungen wurde die Tabelle für die erdmagnetische Horizontalintensität zu Beginn des Jahres 1945 (3252 Tabellen und Karten für die Verteilung des Feldes und die Säkularvariation. Nach Vestine [1]) verwendet. Theoretisch mußten sich längs der einzelnen Breitenparallelen jeweils konstante Feldgrößen ergeben, doch kann dies praktisch niemals erwartet werden, denn einerseits ist kaum anzunehmen, daß das Material der Sidero- und Schalkosphäre, sowie der Sima- und Sialschicht homogen zusammengesetzt ist und andererseits werden noch Magmabewegungen vorhanden sein.

Weiter liegt zwar die Magmatemperatur weit über dem Curiepunkt aber in der ebenfalls inhomogenen zusammengesetzten Frakturzone ist dies keineswegs der Fall, sodaß hier in den einzelnen Schichten starke Schwankungen der magnetischen Permeabilität auftreten können, insbesondere dann, wenn in der Frakturzone Lager ferromagnetischer Mineralien vorhanden sind. Hierdurch muß eine Lokalvariation der Feldintensität längs der Breitenparallelen verursacht werden. Schließlich wird das erdmagnetische Feld noch induktiv durch die Ströme ionisierten Sonnengases gestört, welche den Teil des Planetensystems durchströmen, der zu dem betreffenden Zeitpunkt gerade vom Erdkörper durchlaufen wird, sodaß neben den lokalen, vom Längengrad abhängigen Schwankungen, noch zeitliche Schwankungen hinzukommen, deren Rhythmus im wesentlichen von der jeweiligen Sonnentätigkeit bestimmt wird. Aus diesem Grunde wurde die oben angeführte Tabelle mit den Meßwerten gemittelt, d.h. für jeden der zur Diskussion stehenden Breitengrade wurde das arithmetische Mittel der Meßgrößen aller Längengrade errechnet, was für die nördlichen Breiten zu den Mittelwerten $\underline{H}_h(N)$ und für die südlichen $\underline{H}_h(S)$ führt. Schließlich wurde noch $\underline{H}_h = \frac{1}{2} (\underline{H}_h(N) + \underline{H}_h(S))$ als Mittelwert von $\underline{H}_h(N)$ auf α^0N und $\underline{H}_h(S)$ auf den entsprechenden Breitengrad α^0S gebildet. Die so gemittelten Meßwerte der magnetischen Horizontalkomponente (aufgenommen zu Beginn des Jahres 1945) sind in der nachstehenden Tabelle zusammengefaßt:

T a b e l l e II

φ	80°	70°	60°	50°	40°	30°	20°	10°	0°
$\underline{H}_h(N)$	42	83,3	136,3	191	243,3	288,2	322	327,7	333,4
$\underline{H}_h(S)$	151,5	149,6	171,2	190,6	208,3	235,1	271	307,4	333,4
$\underline{H}_h$	96,7	116,5	153,7	190,8	225,8	261,7	296,5	317,5	333,4

Kennzeichen $\delta_1 = H_h - \underline{H}_h(N)$ sowie $\delta_2 = H_h - \underline{H}_h(S)$ und $\delta_3 = H_h - \underline{H}_h$ die Abweichungen dieser Mittelwerte von den theoretischen Werten der Tabelle I, so folgt für diese Abweichungen die Zusammenstellung

T a b e l l e III

φ	80°	70°	60°	50°	40°	30°	20°	10°	0°
δ_1	+7	+153	+8,7	-46	-213	-37,2	-49,5	-42,1	-43,4
δ_2	-102,5	-51	-26,2	-4,2	+13,7	+15,9	+1,5	-21,8	-43,4
δ_3	-47,7	-17,9	-8,7	-4,4	-3,8	-10,7	-24	-31,9	-43,4

Diese Abweichungen können noch Tagesschwankungen von maximal ± 10 Einheiten unterworfen sein. Auffällig ist die starke Abweichung längs 80°S . Auf jeden Fall verschwinden nirgends die Abweichungen von der Theorie vollständig, doch mag dies daran liegen, daß Gleichung b selbst nur eine Abschätzung ist und deshalb approximativen Charakter trägt und weil außer dem der Erdkörper keineswegs eine homogen zusammengesetzte ideale Kugel ist sondern tatsächlich ein inhomogen zusammengesetztes unregelmäßiges Ellipsoid darstellt. Größenordnungsmäßig wird aber offensichtlich nach Tabelle III die Horizontalintensität des erdmagnetischen Feldes durch die Approximation b ganz gut wiedergegeben. Neben dieser Horizontalintensität H_h wird $H_R = H_h + H_v$ noch von einer Vertikalintensität H_v $\perp$ H_h bestimmt, doch liegt es in der Natur des Feldrotors, daß diese Intensität von der Approximation b nicht erfaßt werden kann aber in einem hermiteschen Anteil erscheint, welcher der zu Gleichung b führenden Approximation verloren gegangen ist. Eine Erfassung dieser Vertikalkomponente ist mit sehr großen mathematischen Schwierigkeiten verbunden, doch ist für die nächste Zeit die mathematische Lösung des Problems geplant, sodaß dann die Möglichkeit besteht, auch H_v sowie die Gesamtintensität H_R und die magnetische Inklination mit den geophysikalischen Messungen des erdmagnetischen Feldes zu vergleichen.

Nachsatz

Der Autor hat über die Gravitationsgrenzen und die sich daraus ergebenden astrophysikalischen Konsequenzen in einem Vortrag gelegentlich des III. Internationalen Astronautischen Kongresses in Stuttgart am 6. Sept. 1952 gesprochen. Die Berechnung des lunaren Magnetfeldes wurde vom Autor ebenfalls in einem Vortrag anlässlich eines internationalen Astronautischen Kongresses in Bremen am 6. Sept. 1958 öffentlich bekanntgegeben (also ungefähr 1 Jahr vor der Mondumfahrung durch die russische Station).